Wissenschaftliche Beilage
zum Jahresbericht der Oberrealschule zu Grofs-Lichterfelde.
Ostern 1906.

Aufgaben

zur

Quadratur der Kegelschnitte.

Für Primaner höherer Lehranstalten.

Von

Dr. RICHARD SCHRÖDER.

Progr.-No. 154.





I. Vorbemerkung.

Die folgenden Aufgaben dürften vielleicht nicht unwillkommen sein, da sie nicht nur an sich interessant sind, sondern auch zu ihrer Lösung interessante Anwendungen verschiedener Kapitel der Mathematik zulassen oder fordern: analytische Untersuchungen, größte Werte, die Lösung transzendenter Gleichungen mittelst goniometrischer Reihen oder durch die regula falsi, Sätze über cyclometrische Funktionen etc.

Vorausgesetzt wird die Kenntnis der folgenden 4 Formeln:

1. Wenn $y^2 = 2\,px$ die Scheitelgleichung der Parabel ist, so ist der Inhalt F derjenigen Fläche, die von der Parabelachse, einer Ordinate und dem zugehörigen, vom Scheitel beginnenden Parabelbogen begrenzt wird:

$$F = \frac{2}{3}\,xy = \frac{2}{3}\,x\sqrt{2\,px}.$$

2. Wenn $x^2 + y^2 = r^2$ die Mittelpunktsgleichung des Kreises, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist, so ist der Inhalt F derjenigen Fläche, die von der Ordinatenachse, der Abscissenachse, einer Ordinate und dem zugehörigen, von der Ordinatenachse beginnenden Kurvenbogen begrenzt wird:

a) für den Kreis: $F = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right\}$

b) für die Ellipse: $F = \frac{b}{2a}\left\{x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right\}.$

3. Wenn $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel ist, so ist der Inhalt F derjenigen Fläche, die von der Hauptachse, einer Ordinate und dem zugehörigen, vom Scheitel beginnenden Hyperbelbogen begrenzt wird:

$$F = \frac{b}{2a}\left\{x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \cdot l\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)\right\}.$$

In allen 4 Formeln bedeutet x die zur Grenzordinate y gehörige Abscisse. l bedeutet lognat.

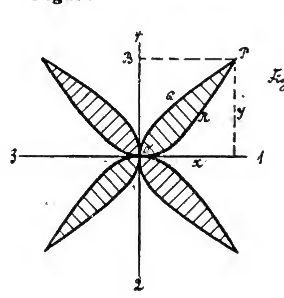
Die Ableitung dieser Formeln mittelst der drei Integrale $\int\sqrt{x}\,dx, \int\sqrt{r^2 - x^2}\,dx, \int\sqrt{x^2 - a^2}\,dx$ findet sich in den Lehrbüchern der höheren Analysis, u. a. in des Verfassers „Grundzügen der Differentialrechnung und Integralrechnung. Für Schüler von höheren Lehranstalten“ etc. Leipzig. B. G. Teubners Verlag, 1905.

II. Aufgaben.

1. **Von einer Parabel, deren Gleichung $y^2 = 2\,px$ ist, wird durch die auf der Achse senkrechte Brennpunktssehne ein Stück abgeschnitten. Wie groß ist der Flächeninhalt F dieses Stückes?**

Lösung: $F = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{2} \cdot p = \frac{2}{3}\,p^2.$

2. **Vier kongruente Parabeln vom Parameter 2p haben den Scheitel gemein; ihre Achsen bilden paarweise gerade Linien, die auf einander senkrecht stehen. Welchen Inhalt besitzt die von ihnen umschlossene sternförmige Figur?**



Lösung: Die Gleichungen der 4 Parabeln sind:

1) $y^2 = 2\,px$, 2) $x^2 = -2\,py$,
3) $y^2 = -2\,px$, 4) $x^2 = 2\,py$.

Also sind die Koordinaten des Schnittpunkts P der Parabeln 1 und 4:

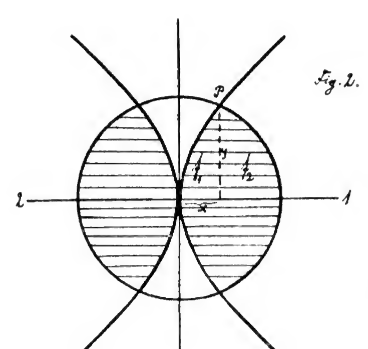
$x = y = 2\,p.$

Also ist Fläche OQPA $= \frac{2}{3} \cdot 2\,p \cdot 2\,p = \frac{8}{3}\,p^2$. Also ist Fläche OQPB = Fläche ORPA $= xy - \frac{8}{3}\,p^2 = \frac{4}{3}\,p^2$. Also ist

Fläche OQPR $= \frac{8}{3}\,p^2 - \frac{4}{3}\,p^2 = \frac{4}{3}\,p^2.$

Also ist der Inhalt des ganzen Parabelsterns $\frac{16}{3}\,p^2$.

3. **Zwei kongruente, entgegengesetzt verlaufende Parabeln mit dem Parameter 2p haben den Scheitel gemein, ihre Achsen bilden eine Gerade. Um den Scheitel wird ein Kreis geschlagen, der durch denjenigen Punkt geht, in welchem das im Brennpunkt auf der Achse errichtete Lot die Parabel schneidet. Wie groß ist der Inhalt F der den Kurven gemeinsamen Flächenstücke?**



Lösung:
Gleichung des Kreises:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + p^2 = \frac{5}{4} p^2.$$

Gleichung der Parabel 1:

$$y^2 = 2\,px.$$

Die Koordinaten des Schnittpunkts P sind:

$$x = \frac{p}{2},\; y = p.$$

Also ist:

$$\text{Fläche } f_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{2} \cdot p = \frac{1}{3} p^2$$

$$\text{Fläche } f_2 = \frac{5}{16} \cdot p^2 \pi - \frac{p}{4} \sqrt{\frac{5}{4} p^2 - \frac{p^2}{4}} - \frac{5}{8} p^2 \cdot \arcsin\left(\frac{\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}\sqrt{5}}\right).$$

Also ist:

$$f_1 + f_2 = \frac{5}{16} p^2 \pi + \frac{1}{3} p^2 - \frac{1}{4} p^2 - \frac{5}{8} p^2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

Also ist:

$$F = 4\,(f_1 + f_2) = p^2 \left\{\frac{1}{3} + \frac{5}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right]\right\}.$$

Da $\arcsin \alpha + \arccos \alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\arccos \alpha = \arcsin \sqrt{1 - \alpha^2}$ ist, so kann man hierfür auch schreiben:

$$F = p^2 \left\{\frac{1}{3} + \frac{5}{2} \arcsin\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)\right\} = 3{,}1 \cdots p^2.$$

Also ist F annähernd gleich dem Inhalt eines Kreises vom Radius p.

4. **Zwei kongruente, entgegengesetzt verlaufende Parabeln mit dem Parameter 2p haben den Scheitel gemein, ihre Achsen bilden eine Gerade. Um den Scheitel wird der Kreis geschlagen, der durch den Brennpunkt geht. Wie groß ist der Inhalt F der den Kurven gemeinsamen Flächenstücke?**

Lösung: Gleichung der Parabel 1: $y = 2^2\,px$

Gleichung des Kreises: $x^2 + y^2 = \frac{p^2}{4}$.

Also Schnittpunktskoordinaten: $x = \frac{p}{2}(\sqrt{5} - 2)$, $y = p\sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

Fläche $f_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{2} (\sqrt{5} - 2) \cdot p \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 2} = \frac{1}{3} p^2 \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^3}$.

Fläche $f_2 = \frac{p^2 \pi}{16} - \frac{p}{4} (\sqrt{5} - 2) \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} (\sqrt{5} - 2)^2} - \frac{p^2}{8} \arcsin (\sqrt{5} - 2) =$

$$= \frac{p^2 \pi}{16} - \frac{p^2}{4} \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^3} - \frac{p^2}{8} \arcsin (\sqrt{5} - 2).$$

Fläche $f_1 + f_2 = \frac{p^2 \pi}{16} - \frac{p^2}{8} \arcsin (\sqrt{5} - 2) + \frac{p^2}{3} \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^3} -$

$$- \frac{p^2}{4} \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^3}.$$

Fläche $F = 4 (f_1 + f_2) = p^2 \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin (\sqrt{5} - 2) + \frac{1}{3} \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^3} \right\} =$

$$= 0{,}70437 \cdots p^2.$$

5. **Wie groß ist dasjenige Stück einer Ellipse, das von den beiden auf der Hauptachse senkrechten Brennpunktssehnen herausgeschnitten wird?**

Lösung:

Gleichung der Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$x = e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

$$f = \frac{b}{2a} \left\{ \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)} + \right.$$

$$\left. + a^2 \cdot \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) \right\}$$

$$F = 4f = \frac{2b}{a} \left\{ b \sqrt{a^2 - b^2} + a^2 \cdot \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) \right\}.$$

1. Beispiel:

Wenn $b = \frac{a}{2} \sqrt{3}$ ist, wird $F = \frac{a^2}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{\pi}{3} \sqrt{3} \right) = 1{,}6569 \cdots a^2$.

2. Beispiel:

Wenn $b = \frac{a}{2} \sqrt{2}$ ist, wird $F = \frac{a^2}{2} \sqrt{2} \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) = 1{,}8178 \cdots a^2$.

3. Beispiel:

Wenn $b = \frac{a}{2}$ ist, wird $F = a^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = 1{,}4802 \cdots a^2$.

6. **Wie groß muß in der vorigen Aufgabe bei gegebener Hauptachse 2a die Nebenachse 2b genommen werden, damit das herausgeschnittene Stück so gross wie möglich wird?**

Lösung: $F = \frac{2b}{a} \left\{ b \sqrt{a^2 - b^2} + a^2 \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) \right\}$.

Es ist (Fig. 3): $b = a\cos\varphi$ und $\sqrt{a^2 - b^2} = a\sin\varphi$, also

$$F = 2\cos\varphi\left\{a^2\sin\varphi\cos\varphi + a^2\arcsin(\sin\varphi)\right\} = 2a^2\left\{\sin\varphi\cos^2\varphi + \varphi\cos\varphi\right\},$$

also $$\frac{dF}{d\varphi} = 2a^2\left\{-2\sin^2\varphi\cos\varphi + \cos^3\varphi - \varphi\sin\varphi + \cos\varphi\right\} = 0, \text{ oder}$$

$$-2(1-\cos^2\varphi)\cos\varphi + \cos^3\varphi - \varphi\sin\varphi + \cos\varphi = 0, \quad \text{oder}$$

$$3\cos^3\varphi - \cos\varphi = \varphi\sin\varphi, \text{ also muß}$$

$$\varphi = \frac{3\cos^2\varphi - 1}{\operatorname{tg}\varphi} \text{ oder } \varphi\operatorname{tg}\varphi - 3\cos^2\varphi + 1 = 0 \text{ sein.}$$

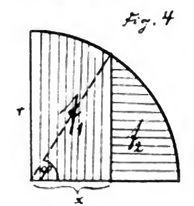
Behandelt man diese transzendente Gleichung nach der regula falsi, so findet man

$$\varphi = 41^0\, 57'\, 19''.$$

Also muß $\quad b = a\cos 41^0\,57' = 0{,}743\ldots a$ sein.

Daß man es mit einem Maximum zu tun hat, bedarf keiner Untersuchung, da es sich aus der Natur der Aufgabe ohne Weiteres ergibt.

7. Ein gegebener Kreisquadrant (Radius r) soll durch eine Parallele zum Grenzradius so in 2 Stücke geteilt werden, daß der Inhalt des einen Stückes das n fache vom Inhalt des anderen Stückes ist.



Lösung: Aus den Gleichungen: $f_1 = n f_2$ und

$$f_2 = \frac{r^2\pi}{4} - f_1 \text{ folgt:}$$

$$f_1 = \frac{n r^2 \pi}{4(n+1)}.$$

Da nun

$$f_1 = \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \text{ ist, so muß sein:}$$

$$x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2\arcsin\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{n r^2\pi}{2(n+1)}.$$

Wir setzen $x = r\cos\varphi$ und erhalten:

$$r^2\sin\varphi\cos\varphi + r^2\arcsin(\cos\varphi) = \frac{n r^2\pi}{2(n+1)}, \text{ oder}$$

$$\sin 2\varphi + 2\arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right] = \frac{n\pi}{n+1}, \text{ oder}$$

$$\sin 2\varphi + 2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{n\pi}{n+1}, \text{ oder}$$

$$2\varphi - \sin 2\varphi = \frac{\pi}{n+1}.$$

Setzen wir $2\varphi = \psi$, so kommen wir auf die transzendente Gleichung:

$$\psi - \sin\psi = \frac{\pi}{n+1}.$$

Allgemein ist diese Gleichung nicht lösbar, wohl aber, wenn für n eine bestimmte Zahl gegeben ist. Wir begnügen uns mit dem Spezialfall $n = 1$. Unsere Gleichung geht dann über in

$$♃ - \sin ♃ = \frac{\pi}{2} \text{ oder } \cos\left(\frac{\pi}{2} - ♃\right) = ♃ - \frac{\pi}{2} \text{ oder, da } \cos\alpha = \cos(-\alpha) \text{ ist:}$$

$$\cos\left(♃ - \frac{\pi}{2}\right) = ♃ - \frac{\pi}{2}, \text{ also, wenn } ♃ - \frac{\pi}{2} = \vartheta \text{ gesetzt wird: } \cos\vartheta = \vartheta.$$

Kommt es auf größere Genauigkeit nicht an, so kann man aus der Reihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

die Gleichung $x = 1 - \frac{x^2}{2!}$ oder $x^2 + 2x - 2 = 0$ ansetzen, woraus $x = -1 + \sqrt{3} = 0{,}73\cdots$ oder $x = 42^0$ folgt. Will man größere Genauigkeit erzielen, so verfährt man nach der regula falsi und findet

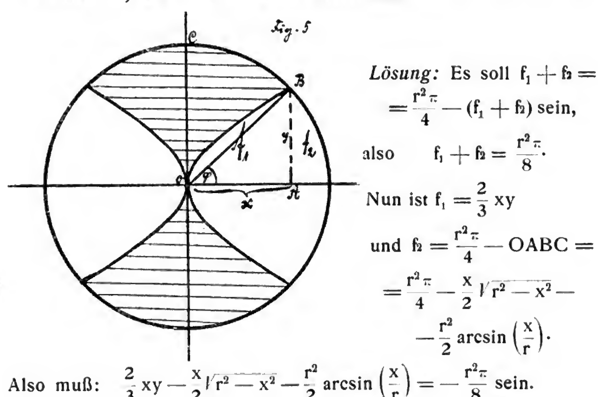
$$x = 0{,}73908\cdots \text{ oder } x = 42^0\,20'\,47''. \quad \text{Mithin ist } ♃ = \frac{\pi}{2} + \vartheta =$$

$$= 132^0\,20'\,47'', \text{ also } \varphi = \frac{♃}{2} = 66^0\,10'\,24'', \text{ also endlich}$$

$$x = r.\cos 66^0\,10'\,24'' = 0{,}404\cdots r.$$

NB. Wäre nicht ein Kreisquadrant, sondern Ellipsenquadrant zu teilen, so würde die Rechnung dieselbe bleiben.

8. **Um den gemeinsamen Scheitel zweier kongruenter, entgegengesetzt verlaufender Parabeln, deren Achsen eine Gerade bilden, soll derjenige Kreis beschrieben werden, welcher von den Parabeln ebensogroße Stücke abschneidet, wie die Parabeln von ihm.**



Lösung: Es soll $f_1 + f_2 = \frac{r^2\pi}{4} - (f_1 + f_2)$ sein,

also $$f_1 + f_2 = \frac{r^2\pi}{8}.$$

Nun ist $f_1 = \frac{2}{3}xy$

und $$f_2 = \frac{r^2\pi}{4} - OABC = \frac{r^2\pi}{4} - \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{r}\right).$$

Also muß: $$\frac{2}{3}xy - \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{r}\right) = -\frac{r^2\pi}{8} \text{ sein.}$$

Wir setzen $x = r \cos\varphi$, also $y = r \sin\varphi$ und erhalten:

$$\frac{2}{3} r^2 \sin\varphi \cos\varphi - \frac{1}{2} r^2 \sin\varphi \cos\varphi . - \frac{1}{2} r^2 \arcsin(\cos\varphi) = - \frac{r^2 \pi}{8}$$

oder $$\sin\varphi \cos\varphi - 3 \arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right] = - \frac{3}{4}\pi$$

oder $$\sin\varphi \cos\varphi = \frac{3}{4}\pi - 3\varphi$$

oder $$\sin 2\varphi = 3\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right)$$

oder $$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) = 3\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right).$$

Setzen wir $\frac{\pi}{2} - 2\varphi = \psi$, so haben wir die transzendente Gleichung

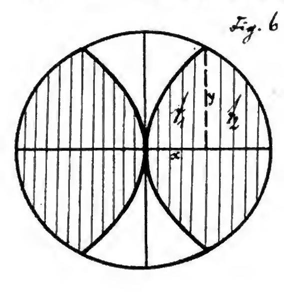
$$\cos\psi = 3\psi$$

zu lösen. Nach der regula falsi erhalten wir, wenn wir die Sekunden vernachlässigen, $\psi = 18^0\, 8'$. Also ist $\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} = 35^0\, 56'$. Mithin ist $x = r \cos 35^0\, 56' = 0{,}809 \cdots r$ und $y = r \sin 35^0\, 56' = 0{,}586 \cdots r$. Ist nun $2p$ der Parameter der gegebenen Parabeln, so muß $y2 = 2p\,x$, also

$$(0{,}586)^2 r^2 = 2p .\ 0{,}809\, r, \text{ also}$$
$$r = \frac{2p .\ 0{,}809}{(0{,}586)^2} = 4{,}7 \cdots p \text{ sein.}$$

Der gesuchte Kreis besitzt also den Radius $4{,}7 \cdots p$.

9. **Der Mittelpunkt einer Ellipse mit den Halbachsen a und b ist der gemeinsame Scheitel zweier kongruenter, entgegengesetzt verlaufender Parabeln, deren Achsen mit der Hauptachse der Ellipse zusammenfallen, und deren Schnittpunkte mit der Ellipse senkrecht über den Brennpunkten der Ellipse liegen. Wie groß ist der Inhalt F der den Kurven gemeinsamen Flächenstücke?**



Lösung: $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, $y = \frac{b^2}{a}$.

Fläche $f_1 = \frac{2}{3} \frac{b^2}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$.

Fläche $$f_2 = \frac{ab\pi}{4} - \frac{b}{2a}\left\{ b \sqrt{a^2 - b^2} + a^2 \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right)\right\}.$$

Fläche $$F = 4(f_1 + f_2) = b\left\{\frac{2b}{3a}\sqrt{a^2 - b^2} + a\left[\pi - 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right)\right]\right\}.$$

1. *Beispiel:* Für $b = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ ist $F = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}649 \cdots a^2$. —

Die ganze Ellipse ist $E = \frac{a^2\pi\sqrt{2}}{2} = 2{,}221 \cdots a^2$, also der Rest $= 0{,}572 \cdots a^2$.

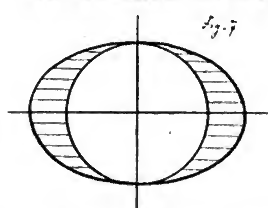
2. *Beispiel:* Für $b = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ ist $F = \frac{a^2}{6}\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi\right) = 2{,}064 \cdots a^2$

und $E = \frac{a^2\pi\sqrt{3}}{2} = 2{,}721 \cdots a^2$, also der Rest $= 0{,}657 \cdots a^2$.

3. *Beispiel:* Für $b = \frac{a}{2}$ ist $F = \frac{a^2}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi\right) = 0{,}6679 \cdots a^2$ und $E =$

$= \frac{a^2\pi}{2} = 1{,}5708 \cdots a^2$, also der Rest $= 0{,}9029 \cdots a^2$.

10. Eine Ellipse hat die Hauptachse 2a. Wie groß muss man die Nebenachse b wählen, damit die Summe F der beiden sichelförmigen Figuren möglichst groß wird, welche der Nebenscheitelkreis von der Ellipse abschneidet?



Lösung:

$$F = ab\pi - b^2\pi = b\pi\,(a - b).$$

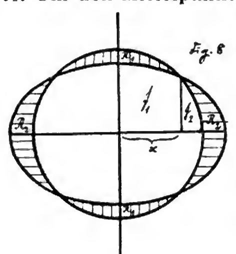
$$\frac{dF}{db} = a\pi - 2\,b\pi = 0, \text{ also } b = \frac{a}{2}.$$

$$\frac{d^2F}{db^2} = -2\,\pi < 0, \text{ also Maximum.}$$

Für $b = \frac{a}{2}$ wird $F = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi$,

also haben wir den Lehrsatz: In einer Ellipse, deren Hauptachse doppelt so groß ist wie die Nebenachse, ist die Summe der beiden durch den Nebenkreis abgeschnittenen Sicheln gleich dem Nebenkreis, also gleich der Hälfte der ganzen Ellipse, und grösser, als in jeder anderen Ellipse mit derselben Hauptachse.

11. Um den Mittelpunkt einer Ellipse wird mit der linearen Excentricität als Radius der Kreis geschlagen. Wie groß ist die Summe F der 4 entstehenden Sicheln?



Lösung:

Gleichung der Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Gleichung des Kreises: $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$

Schnittpunktsabscisse: $x = a\sqrt{\frac{a^2 - 2\,b^2}{a^2 - b^2}}$,

also muß, wenn 4 Sicheln entstehen sollen, $a > b\sqrt{2}$ sein.

$$f_1 = \frac{ab^2\sqrt{a^2-2b^2}}{2(a^2-b^2)} + \frac{ab}{2}\arcsin\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{a^2-b^2}}.$$

$$f_2 = \frac{(a^2-b^2)\pi}{4} - \frac{ab^2\sqrt{a^2-2b^2}}{2(a^2-b^2)} - \frac{a^2-b^2}{2}\arcsin\left(\frac{a\sqrt{a^2-2b^2}}{a^2-b^2}\right).$$

$$4(f_1+f_2) = (a^2-b^2)\pi + 2ab\arcsin\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{a^2-b^2}} -$$

$$- 2(a^2-b^2)\arcsin\left(\frac{a\sqrt{a^2-2b^2}}{a^2-b^2}\right)$$

$$2R_1 = 2(a^2-b^2)\arcsin\left(\frac{a\sqrt{a^2-2b^2}}{a^2-b^2}\right) - 2ab\arcsin\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{a^2-b^2}}.$$

$$2R_2 = ab\pi - (a^2-b^2)\pi - 2ab\arcsin\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{a^2-b^2}} +$$

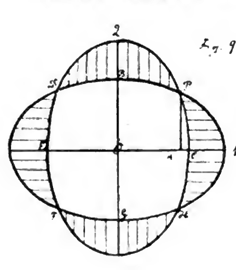
$$+ 2(a^2-b^2)\arcsin\left(\frac{a\sqrt{a^2-2b^2}}{a^2-b^2}\right).$$

$$F = 2(R_1+R_2) = ab\left\{\pi - 4\arcsin\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{a^2-b^2}}\right\} +$$

$$+ (a^2-b^2)\left\{4\arcsin\left(\frac{a\sqrt{a^2-2b^2}}{a^2-b^2}\right) - \pi\right\}.$$

12. Zwei kongruente Ellipsen haben den Mittelpunkt gemein, ihre Achsen stehen aufeinander senkrecht. Wie groß ist die beiden Kurven gemeinsame Fläche f? Wie groß ist die Summe F der 4 Sicheln?

Lösung:



Gleichung der Ellipse 1: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Gleichung der Ellipse 2: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$

Koordinaten des Schnittpunkts P:

$$x = y = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

I) Fläche OAPB $= \frac{b}{2}\left\{\frac{a^2b}{a^2+b^2} + a \cdot \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right\}.$

$$\text{Fläche ACP} = \frac{ab\pi}{4} - \frac{a}{2}\left\{\frac{ab^2}{a^2+b^2} + b\cdot\arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right\}.$$

$$\text{Fläche OCPB} = \frac{ab\pi}{4} + \frac{ab}{2}\left\{\arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right\} =$$

$$= \frac{ab}{2}\left\{\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right)\right\}.$$

$$f = 2\,ab\left\{\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}\right)\right\}.$$

II) Fläche HJPC $= \frac{1}{2}\left\{ab\pi - 2\,ab\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}\right)\right]\right\} =$

$$= ab \arcsin\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right).$$

$$F = 4\,ab \cdot \arcsin\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right).$$

13. **Wie groß muß in der vorigen Aufgabe bei gegebener Hauptachse 2a die Nebenachse 2b genommen werden, damit die Summe der Sicheln I) gleich der gemeinsamen Fläche wird, II) viermal so gross wird, wie die gemeinsame Fläche?**

Lösung: Es soll sein:

I) $$4\,ab \cdot \arcsin\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right) = 2\,ab\left\{\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}\right)\right\}, \text{ also}$$

$$\arcsin\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right) = \frac{\pi}{6} = 30^0, \text{ also}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \sin 30^0 = \frac{1}{2}, \text{ also}$$

$$2\,b = \frac{2}{3}\,a\sqrt{2}.$$

II) Es ergibt sich: $2\,b = 2\,a\,(2 - \sqrt{3})$.

14. **Wie groß muß in der vorigen Aufgabe bei gegebener Hauptachse 2a die Nebenachse 2b genommen werden, damit die Summe der Sicheln möglichst groß wird?**

Lösung:

$$F = 4\,ab \arcsin\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right).$$

$$\frac{dF}{db} = 4a\left\{\frac{b}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2}} \cdot \frac{(a^2 + b^2)(-2b) - (a^2 - b^2) \cdot 2b}{(a^2 + b^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \arcsin\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)\right\} = 0$$

Also muß $\frac{2\,ab}{a^2 + b^2} = \arcsin\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)$ sein.

Nun ist $\arcsin x = \arccos\sqrt{1 - x^2}$, also muß

$$\frac{2\,ab}{a^2 + b^2} = \arccos\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2} = \arccos\left(\frac{2\,ab}{a^2 + b^2}\right)$$

sein. Wir stoßen also wieder auf die transzendente Gleichung $x = \cos x$. Wie schon in Aufgabe 6 gezeigt wurde, ist $x = 0{,}73908\ldots$ Wir setzen daher annähernd $\frac{2ab}{a^2 + b^2} = 0{,}739$ und finden:

$$b = \frac{a}{0{,}739}\left(1 \pm \sqrt{1 - (0{,}739)^2}\right).$$

Da $b < a$ sein soll, so ergibt die Gleichung annähernd

$$b = 0{,}44\ldots a = \frac{4}{9}\,a.$$

Die folgende elegante Lösung hat Herr Dr. F. Weiß dem Verfasser mitgeteilt.

Setzen wir in der Gleichung

$$F = 4\,ab \cdot \arcsin\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)$$

$b = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$, so erhalten wir

$$F = 4\,a^2\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\arcsin\left(\frac{1 - \mathrm{tg}^2\varphi}{1 + \mathrm{tg}^2\varphi}\right).$$

Nun ist $\frac{1 - \mathrm{tg}^2\varphi}{1 + \mathrm{tg}^2\varphi} = \cos 2\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right)$, also entsteht:

$$F = 4\,a^2\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right)\right] = 4\,a^2\,\mathrm{tg}\,\varphi \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right].$$

Also muß

$$\frac{dF}{d\varphi} = 4\,a^2\left\{-\,2\,\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{\frac{\pi}{2} - 2\varphi}{\cos^2\varphi}\right\} = 0$$

sein, also muß $\frac{\pi}{2} - 2\varphi = \sin 2\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right)$ sein, wodurch wieder die obige transzendente Gleichung $x = \cos x$ erhalten wird. Sie liefert (vgl. Aufgabe 6): $x = \frac{\pi}{2} - 2\varphi = 42^0\,20'\,47''$, also $\varphi = 23^0\,49'\,37''$. Hieraus aber folgt, daß annähernd $b = a\,\mathrm{tg}\,\varphi = 0{,}44\cdots a$ ist, wie auch oben ermittelt war.

Daß wir es mit einem Maximum zu tun haben, geht zwar schon aus der Natur der Aufgabe hervor, soll aber auch an der ersten Lösung gezeigt werden. Es war

$$\frac{dF}{db} = 4\,a\left\{-\frac{2\,ab}{a^2 + b^2} + \arcsin\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)\right\}$$

also ist:

$$\frac{d^2F}{db^2} = 4\,a\left\{-\frac{(a^2 + b^2)\,2\,a - 2\,ab\,2\,b}{(a^2 + b^2)^2} + \right.$$

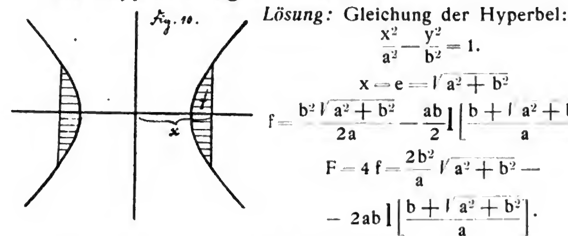
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2}} \cdot \frac{(a^2 + b^2)(-2\,b) - (a^2 - b^2)\,2\,b}{(a^2 + b^2)^2}\right\}$$

oder:

$$\frac{d^2F}{db^2} = 4\,a\left\{-\frac{2\,a^3 - 2\,ab^2}{(a^2 + b^2)^2} - \frac{2\,a}{a^2 + b^2}\right\}$$

oder: $$\frac{d^2F}{db^2} = -4a \cdot \frac{2a^3 - 2ab^2 + 2a(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2} = -\frac{16a^4}{(a^2+b^2)^2}$$
ein Ausdruck, der für jeden Wert von b kleiner als Null ist.

15. **Wie groß ist diejenige Fläche F, welche durch die beiden auf der Hauptachse senkrechten Brennpunktsehnen von einer Hyperbel abgeschnitten wird?**



Lösung: Gleichung der Hyperbel:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
$$x = e = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$f = \frac{b^2\sqrt{a^2+b^2}}{2a} - \frac{ab}{2}\,l\left[\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right].$$
$$F = 4f = \frac{2b^2}{a}\sqrt{a^2+b^2} -$$
$$- 2ab\,l\left[\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right].$$

1. *Beispiel:* In der gleichseitigen Hyperbel ist
$$F = 2a^2\{\sqrt{2} - l[1+\sqrt{2}]\} = 1{,}0656\ldots a^2.$$

2. *Beispiel:* Für $b = \frac{3}{4}a$ ist $F = 0{,}3665\ldots a^2$.

3. *Beispiel:* Für $b = \frac{4}{3}a$ ist $F = 2{,}996\ldots a^2$.

16. **Zwei kongruente Hyperbeln haben den Mittelpunkt gemein, ihre Achsen stehen auf einander senkrecht. Welchen Inhalt F besitzt die von ihnen umschlossene sternförmige Figur?**

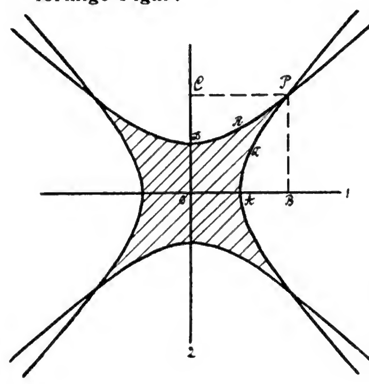


Fig. 11.

Lösung: Gleichung der Hyperbel 1:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
Gleichung der Hyperbel 2:
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$
Koordinaten des Schnittpunkts P: $x = y = \frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$.

Also, wenn a = b ist, verlaufen die Hyperbeln asymptotisch; sollen sie sich schneiden, so muß $b > a$ sein.

Fläche AQPB = Fläche DRGP =

$$= \frac{b}{2a} \cdot \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}} \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} - a^2} - \frac{ab}{2} \, l \left(\frac{\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}} + \sqrt{\frac{b^2 a^2}{b^2 - a^2} - a^2}}{a} \right)$$

Fläche AQPB = Fläche DRCP $= \frac{a^2 b^2}{2(b^2 - a^2)} - \frac{ab}{2} \, l \left(\frac{a + a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \right)$

Fläche OAQPRD $= xy - 2 \cdot$ Fläche AQPB $= ab \cdot l \left(\frac{a + b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \right)$.

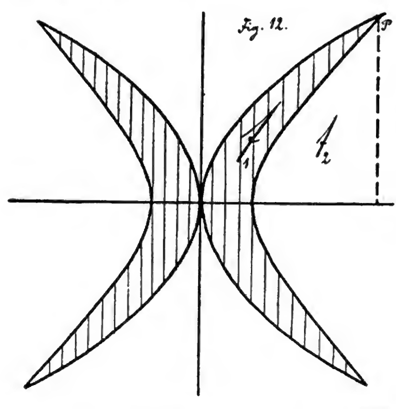
Also ist der Inhalt des ganzen Hyperbelsterns

$$F = 4\,ab \cdot l \left(\frac{a + b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \right) = 2\,ab \cdot l \left(\frac{b + a}{b - a} \right).$$

1. *Beispiel:* Für $a = 3$ cm, $b = 5$ cm ist $F = 41{,}589$ qcm.

2. *Beispiel:* Für $a = 4$ cm, $b = 5$ cm ist $F = 87{,}84$ qcm.

17. **Zwei kongruente entgegengesetzt verlaufende Parabeln, deren Achsen eine Gerade bilden, haben den Scheitel gemein. Dieser ist Mittelpunkt einer Hyperbel, deren Hauptachse mit der Parabelachse zusammenfällt und deren Scheitel die Brennpunkte der Parabeln sind. Wie groß ist die Summe F der entstehenden sichelförmigen Figuren?**



Lösung: Gleichung der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Also Parameter der Parabel: $2p = 4a$.

Gleichung der Parabel:

$$y^2 = 4ax.$$

Abscisse des Schnittpunkts P:

$$x = \frac{a}{b^2} \left[2a^2 + \sqrt{4a^4 + b^4} \right].$$

$$f_1 + f_2 = \frac{2}{3} x \sqrt{2px} =$$

$$= \frac{4a^2}{3b^3} \sqrt{\left[2a^2 + \sqrt{4a^4 + b^4} \right]^3}.$$

$$f_2 = \frac{a^2}{b^3} \sqrt{\left[2a^2 + \sqrt{4a^4 + b^4} \right]^3} - \frac{ab}{2} \, l \left(\frac{2a^2 + \sqrt{4a^4 + b^4} + 2a\sqrt{2a^2\sqrt{4a^4 + b^4}}}{b^2} \right).$$

$$F = 4f_1 = \frac{4a^2}{3b^4}\sqrt{[2a^2 + \sqrt{4a^4 + b^4}]^3} +$$

$$+ 2ab \cdot \sqrt{\left(\frac{2a^2 + \sqrt{4a^4 + b^4} - 2a\sqrt{2a^2 + \sqrt{4a^4 + b^4}}}{b^2}\right)}.$$

1. *Beispiel:* Bei der gleichseitigen Hyperbel ist

$$F = 2\,a^2\left\{\frac{2}{3}\sqrt{(2 + \sqrt{5})^3} + \sqrt{\left[2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}\right]}\right\} = 15{,}86 \cdot \cdot\, a^2.$$

2. *Beispiel:* Für $b = 2\,a\sqrt[4]{2}$ ist $F = 4\,a^2\sqrt[4]{2}\left\{\frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{(1 + \sqrt{2})}\right\} =$

$$= 6{,}43 \cdot \cdot\, a^2.$$

18. **Eine Hyperbel hat mit zwei kongruenten, entgegengesetzt verlaufenden Parabeln den Mittelpunkt gemein. Die Parabelachsen bilden eine Gerade und fallen mit der Ordinatenachse der Hyperbel zusammen. Fragen?**

  I. **Wie groß muß der Parameter der Parabeln sein, damit sie von der Hyperbel berührt werden?**

  II. **Wie groß ist im Falle I die von den Kurven umschlossene Fläche F?**

  III. **Wenn die Hyperbel von den Parabeln geschnitten wird, wie groß ist die Summe F der vier entstehenden geschlossenen Figuren?**

Lösung: I. Gleichung der Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Gleichung der oberen Parabel: $x^2 = 2py$.

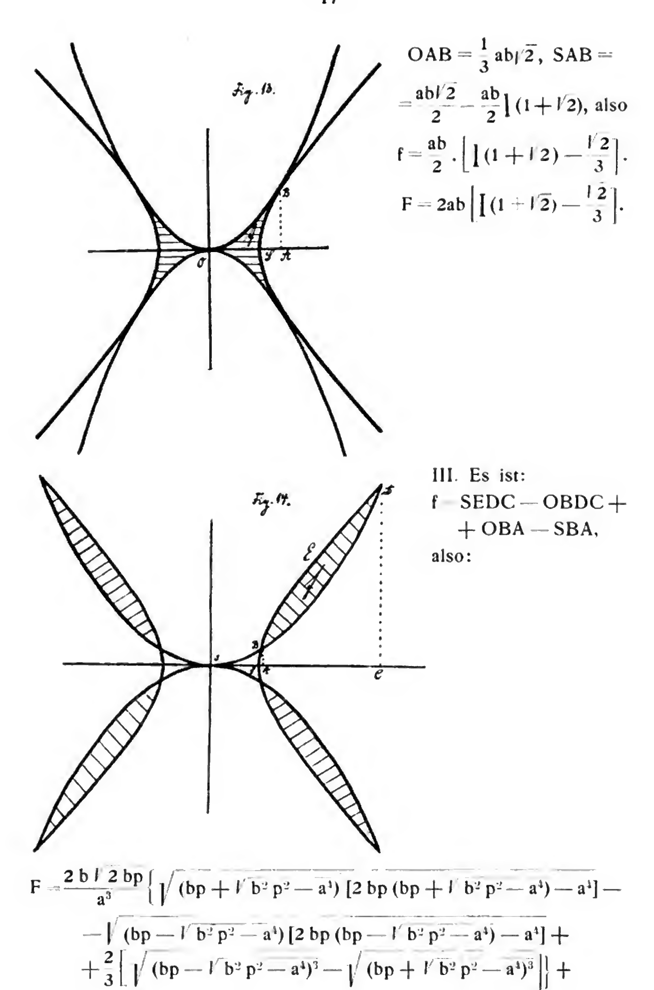
Schnittpunkts-koordinaten:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a}\sqrt{2bp(bp + \sqrt{b^2p^2 - a^4})} \\ y_1 = \frac{b}{a^2}\left(bp + \sqrt{b^2p^2 - a^4}\right) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{1}{a}\sqrt{2bp(bp - \sqrt{b^2p^2 - a^4})} \\ y_2 = \frac{b}{a^2}\left(bp - \sqrt{b^2p^2 - a^4}\right) \end{cases}$$

Damit überhaupt gemeinsame Punkte existieren, muß also $bp > a^2$, also $2p > \frac{2a^2}{b}$ sein.

Die Kurven berühren sich also, wenn $2p = \frac{2a^2}{b}$ ist.

II. Es ist $F = 4f$ und $f = OAB - SAB$. — Nach I) sind die Berührungskoordinaten $\begin{cases} x = a\sqrt{2} \\ y = b \end{cases}$.



$OAB = \frac{1}{3} ab\sqrt{2}$, $SAB = \left(\frac{ab\sqrt{2}}{2} - \frac{ab}{2}\sqrt{(1+\sqrt{2})}\right)$, also

$$f = \frac{ab}{2} \cdot \left[\sqrt{(1+\sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right].$$

$$F = 2ab\left[\sqrt{(1+\sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right].$$

III. Es ist:

$f = SEDC - OBDC + OBA - SBA$,

also:

$$F = \frac{2b\sqrt{2bp}}{a^3}\left\{\sqrt{(bp + \sqrt{b^2p^2 - a^4})\,[2bp\,(bp + \sqrt{b^2p^2 - a^4}) - a^4]} - \right.$$
$$- \sqrt{(bp - \sqrt{b^2p^2 - a^4})\,[2bp\,(bp - \sqrt{b^2p^2 - a^4}) - a^4]} +$$
$$\left. + \frac{2}{3}\left[\sqrt{(bp - \sqrt{b^2p^2 - a^4})^3} - \sqrt{(bp + \sqrt{b^2p^2 - a^4})^3}\right]\right\} +$$

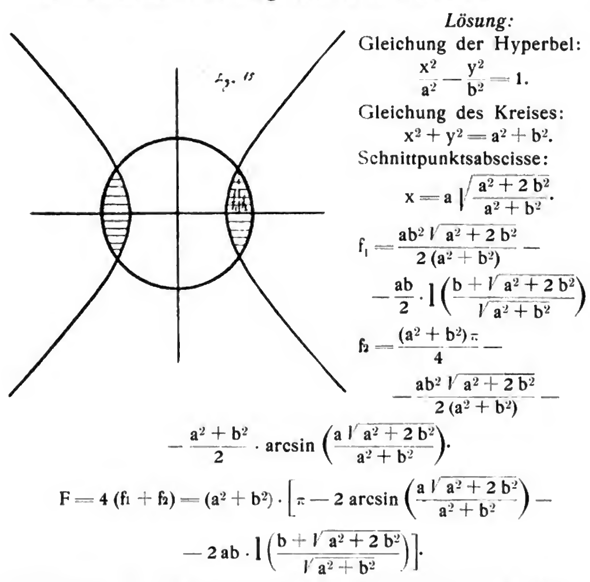
$$+\,2\,ab\cdot l\left(\frac{\sqrt{2\,bp\,(bp-\sqrt{b^2p^2-a^4})}+\sqrt{2\,bp\,(bp-\sqrt{b^2p^2-a^4})-a^4}}{\sqrt{2\,bp\,(bp+\sqrt{b^2p^2-a^4})}+\sqrt{2\,bp\,(bp+\sqrt{b^2p^2-a^4})-a^4}}\right).$$

Spezialfall zu III: Setzt man $p = 2a$ und nimmt man die Hyperbel gleichseitig, so werden die Schnittpunktskoordinaten

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 2a\sqrt{2+\sqrt{3}} \\ y_1 = a\,(2+\sqrt{3}) \end{array}\right. \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} x_2 = 2a\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ y_2 = a\,(2-\sqrt{3}) \end{array} \quad \text{und}$$

$$F = a^2\left\{\frac{4}{3}\left[\sqrt{(2+\sqrt{3})^3}-\sqrt{(2-\sqrt{3})^3}\right]+2\,l\left(\frac{2-\sqrt{3}+2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\right..$$

19. **Um den Mittelpunkt einer Hyperbel ist mit der linearen Exzentrizität als Radius der Kreis geschlagen. Wie groß ist die beiden Kurven gemeinsame Fläche F?**



Lösung:

Gleichung der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Gleichung des Kreises:

$$x^2+y^2=a^2+b^2.$$

Schnittpunktsabscisse:

$$x = a\sqrt{\frac{a^2+2\,b^2}{a^2+b^2}}.$$

$$f_1 = \frac{ab^2\sqrt{a^2+2\,b^2}}{2\,(a^2+b^2)} - \frac{ab}{2}\cdot l\left(\frac{b+\sqrt{a^2+2\,b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$f_2 = \frac{(a^2+b^2)\,\pi}{4} - \frac{ab^2\sqrt{a^2+2\,b^2}}{2\,(a^2+b^2)} - \frac{a^2+b^2}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{a\sqrt{a^2+2\,b^2}}{a^2+b^2}\right).$$

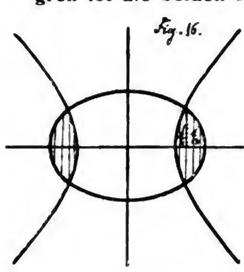
$$F = 4\,(f_1+f_2) = (a^2+b^2)\cdot\left[\pi - 2\arcsin\left(\frac{a\sqrt{a^2+2\,b^2}}{a^2+b^2}\right) - 2\,ab\cdot l\left(\frac{b+\sqrt{a^2+2\,b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right].$$

Spezialfall: Für die gleichseitige Hyperbel ist $a = b$, also

$$F = 2a^2\left[\pi - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) -\right.$$

$$\left. - \mathrm{l}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\right] = 2a^2\left[\frac{\pi}{3} - \mathrm{l}\left(\frac{2{,}7321}{1{,}4142}\right)\right] = 0{,}777\ldots a^2.$$

20. Eine Ellipse hat mit einer Hyperbel den Mittelpunkt und die Lage der Achsen gemein. Die Hauptachse der Ellipse ist gleich der linearen Exzentrizität der Hyperbel, die Nebenachsen beider Kurven sind einander gleich. Wie groß ist die beiden Kurven gemeinsame Fläche F?



Lösung:

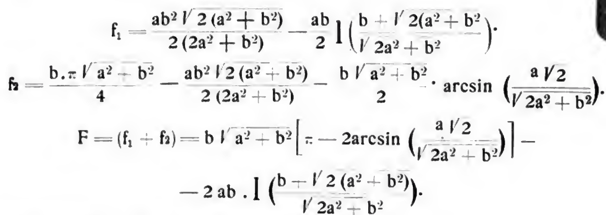
Gleichung der Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2+b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Schnittpunktsabscisse:

$$x = a\sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{2a^2+b^2}}.$$



$$f_1 = \frac{ab^2\sqrt{2(a^2+b^2)}}{2(2a^2+b^2)} - \frac{ab}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{b+\sqrt{2(a^2+b^2)}}{\sqrt{2a^2+b^2}}\right).$$

$$f_2 = \frac{b.\pi\sqrt{a^2+b^2}}{4} - \frac{ab^2\sqrt{2(a^2+b^2)}}{2(2a^2+b^2)} - \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+b^2}}\right).$$

$$F = (f_1+f_2) = b\sqrt{a^2+b^2}\left[\pi - 2\arcsin\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+b^2}}\right)\right] -$$

$$- 2ab\,.\,\mathrm{l}\left(\frac{b+\sqrt{2(a^2+b^2)}}{\sqrt{2a^2+b^2}}\right).$$

Spezialfall: Für die gleichseitige Hyperbel ist:

$$F = a^2\left\{\sqrt{2}\left[\pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right] - \mathrm{l}\,3\right\}.$$



Druck: J. Unverdorben, Gross-Lichterfelde.